

Twierdzenie Arrowa (o niemożliwości)

Mateusz Kielar
Marcin Mieteń

Kenneth Arrow

Amerykański ekonomista
Laureat nagrody Banku Szwecji
im. Alfreda Nobla w dziedzinie
ekonomii w 1972 roku
Jego najważniejsze zasługi to
sformułowanie twierdzenia
niemożliwości (znanego także jako
paradoks lub twierdzenie Arrowa) i formalizacja,
teorii równowagi ogólnej (dowód na istnienie
równowagi ogólnej dla statycznego modelu
konkurencji doskonałej).



Definicje

A – zbiór kandydatów

L – zbiór liniowych porządków na A

Dla każdego $\prec \in L$, \prec jest porządkiem liniowym na A (antysymetrycznym i przechodnim)

Preferencje dla każdego głosującego i są dane przez $\succ_i \in L$, gdzie $a \succ_i b$ znaczy, że głosujący i woli kandydata a od kandydata b

Funkcja $F : L^n \rightarrow L$ (n – liczba głosujących) jest nazywana funkcją społecznego interesu

Właściwości funkcji społecznego interesu (F)

1. Niezależność nieistotnych alternatyw
2. Jednogłośność

Niezależność nieistotnych alternatyw (NNA)

Funkcja F spełnia **niezależność nieistotnych alternatyw (NNA)** jeśli społeczna preferencja pomiędzy każdymi dwoma wyborami a i b zależy tylko od preferencji głosujących dotyczących a i b

Jednogłośność

Funkcja F spełnia **jednogłośność** jeśli:

$$\forall x \in L, F(x, \dots, x) = x.$$

Jeśli wszyscy głosujący mają takie same preferencje wtedy wybór jest taki sam

W szczególności z NNA i jednogłośności wynika, że jeśli dla dowolnych kandydatów a i b wszyscy głosujący stwierdzą że $a > b$ to społeczna preferencja między a i b jest $a > b$.

Dyktator

Głosujący i jest dyktatorem funkcji F jeśli:

$$\forall \prec_1 \dots \prec_n \in L: F(\prec_1, \dots, \prec_n) = \prec_i$$

Spółeczna preferencja w dyktaturze jest po prostu wyborem dyktatora, przy ignorowaniu głosów innych głosujących

Twierdzenie Arrowa

Każda **funkcja społecznego interesu** na zbiorze więcej niż 2 kandydatów, która spełnia jednogłośność i niezależność nieistotnych alternatyw jest dyktaturą

Twierdzenie pomocnicze (nieformalnie)

Wynik funkcji F w stosunku do dwóch dowolnych kandydatów zależy tylko od ciągu preferencji głosujących co do tych dwóch kandydatów. Nie zależy od tego, którzy to są kandydaci!

Jeśli np. $a >_1 b$, $a >_2 b$, $b >_3 a \Rightarrow a > b$

to dla dowolnych c , d

$c >_1 d$, $c >_2 d$, $d >_3 c \Rightarrow c > d$

Twierdzenie pomocnicze (formalnie)

Niech $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ i $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ będą profilami dwóch graczy tak, że dla każdego gracza i

$$a \succ_i b \Leftrightarrow c \succ'_i d$$

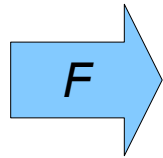
Wtedy $a \succ b \Leftrightarrow c \succ' d$, gdzie $\succ = F(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

$$| \succ' = F(\gamma'_1, \dots, \gamma'_n)$$

Dowód twierdzenia pomocniczego

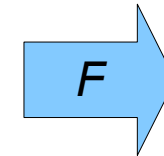
Założmy że mamy dane:

$$\begin{array}{l} a >_1 b \\ a >_2 b \\ b >_3 a \end{array}$$



$$a > b$$

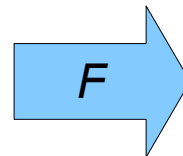
$$\begin{array}{l} c >_1 d \\ c >_2 d \\ d >_3 c \end{array}$$



??

Wynik dla c i d jest zależny tylko od preferencji c do c i d (NNA), które to są analogiczne do preferencji dla a i b .

$$\begin{array}{l} c >_1 a >_1 b >_1 d \\ c >_2 a >_2 b >_2 d \\ b >_3 d >_3 c >_3 a \end{array}$$



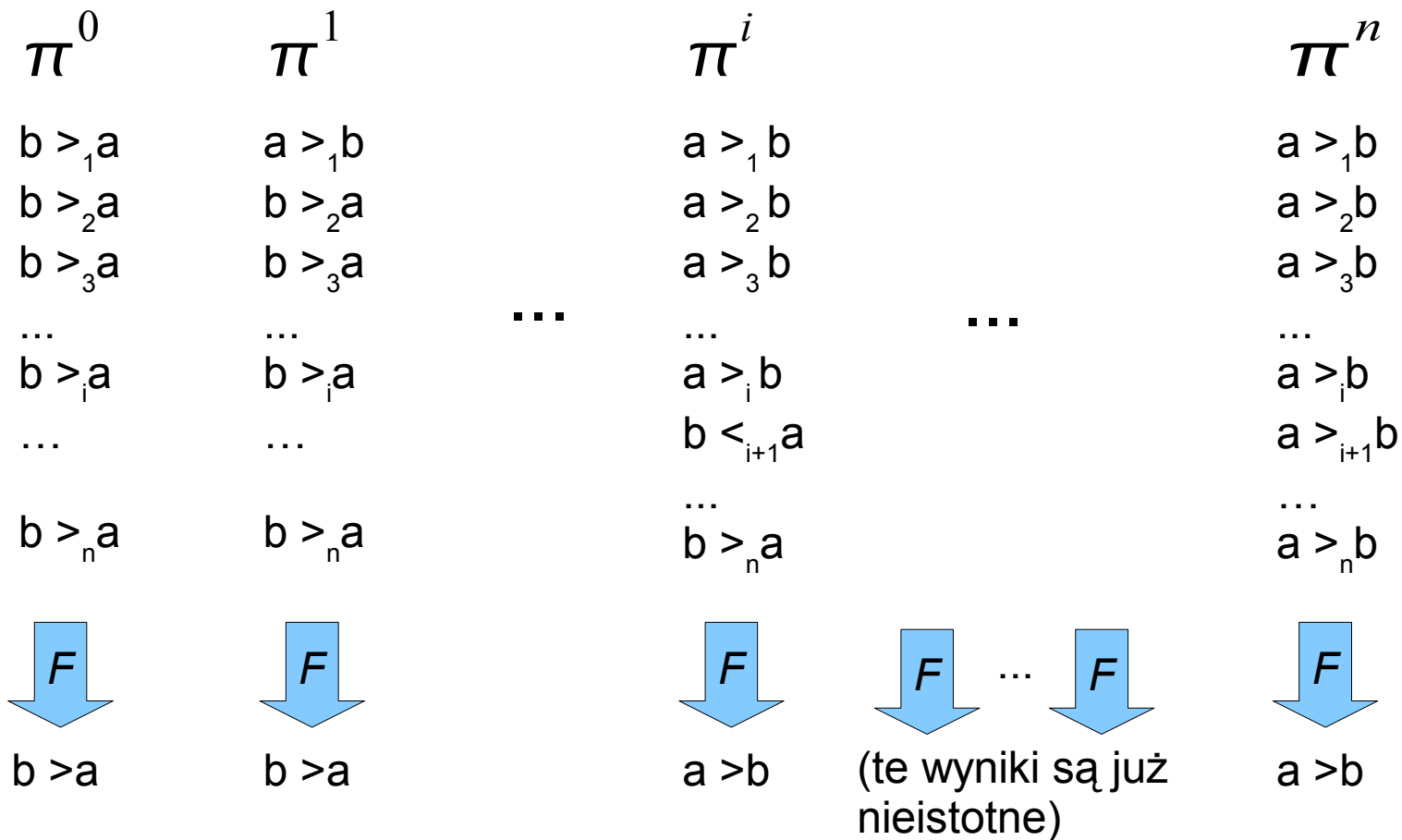
$c > a$ (jednogłośność)
 $a > b$ (założenie)
 $b > d$ (jednogłośność)
 $\Rightarrow c > d$

Dowód twierdzenia pomocniczego

Założmy, że $a \succ b$ i $c \neq b$. Teraz łączymy każde \succ_i i \succ'_i w pojedynczą preferencję \succ_i , umieszczając c zaraz nad a (chyba że $c=a$) i d zaraz pod b (chyba że $d=b$) i zachowując wewnętrzny porządek w każdej parze (a,b) i (c,d) . Teraz używając jednogłośności mamy $c \succ a$ i $b \succ d$ i przez przechodniość $c \succ d$. To dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Dowód Tw. Arrowa

Weźmy jakiegokolwiek $a \neq b \in A$ i dla każdego $0 \leq i \leq n$ definiujemy profil preferencji π^i , w którym dokładnie pierwszych i graczy woli a od b , np. $\pi^i, a \succ_j b \Leftrightarrow j \leq i$. Z jednogłośności, w $F(\pi^0)$ mamy $b \succ a$, z kolei w $F(\pi^n)$ mamy $a \succ b$. Patrząc na $\pi^0, \pi^1, \dots, \pi^n$ ranking pomiędzy a i b w pewnym punkcie się zmienia, więc dla pewnego i^* mamy $F(\pi^{i^*-1}), b \succ a$, z kolei dla $F(\pi^{i^*}), a \succ b$. Dokończymy dowód pokazując, że i^* jest dyktatorem



Pokażemy że głosujący i jest dyktatorem czyli dla dowolnego $c \neq d$ Jeśli $c >_i d$ to $c > d$. Weźmy e różne od c i d . Dla $k < i$ ustawiamy e na początku w relacji $>_k$, dla $k > i$ ustawiamy e na końcu w relacji $>_k$, dla $k = i$ ustawiamy e następująco $c >_i e >_i d$.
 Preferencje dla pary (c, e) są identyczne jak dla (a, b) w $\pi^{i-1} \Rightarrow c > e$
 Preferencje dla pary (e, d) są identyczne jak dla (a, b) w $\pi^i \Rightarrow e > d$
A więc $c > d$. ■

Dowód

$$e >_1 d$$

$$e >_2 d$$

$$e >_3 d$$

...

$$e >_i d$$

$$d >_{i+1} e$$

...

$$d >_n e$$

Identyczne jak dla (a,b) w π^i
Z twierdzenia pomocniczego
wynika że **$e > d$**

$$e >_1 d ? c$$

$$e >_2 d ? c$$

$$e >_3 d ? c$$

...

$$c >_i e >_i d$$

$$d ? c >_{i+1} e$$

...

$$d ? c >_n e$$

$$e >_1 c$$

$$e >_2 c$$

$$e >_3 c$$

...

$$e >_{i-1} c$$

$$c >_i e$$

...

$$c >_n e$$

identyczne jak dla (a,b) w π^{i-1}
Z twierdzenia pomocniczego
wynika że **$c > e$**