Twierdzenie Arrowa (o niemożliwości)

Mateusz Kielar
Marcin Mieteń

Kenneth Arrow

Amerykański ekonomista
Laureat nagrody Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii w 1972 roku
Jego najważniejsze zasługi to sformułowanie twierdzenia niemożliwości (znanego także jako paradoks lub twierdzenie Arrowa) i formalizacja, teorii równowagi ogólnej (dowód na istnienie równowagi ogólnej dla statycznego modelu konkurencji doskonałej).

Definicje

A – zbiór kandydatów
L – zbiór liniowych prządków na A
Dla każdego $\prec \in L$, $\prec$ jest porządkiem liniowym na A (antysymetrycznym i przechodnim)
Preferencje dla każdego głosującego i są dane przez $\succ_i \in L$, gdzie $a \succ_i b$ znaczy, że głosujący i woli kandydata a od kandydata b
Funkcja $F : L^n \to L$ (n – liczba głosujących) jest nazywana funkcją społecznego interesu

Właściwości funkcji społecznego interesu (*F*)

1. Niezależność nieistotnych alternatyw
2. Jednogłośność

Niezależność nieistotnych alternatyw (NNA)

Funkcja F spełnia **niezależność nieistotnych alternatyw (NNA)** jeśli społeczna preferencja pomiędzy każdymi dwoma wyborami a i b zależy tylko od preferencji głosujących dotyczących a i b

Jednogłośność

Funkcja F spełnia **jednogłośność** jeśli:

$$\forall \prec \in L, F(\prec, \ldots, \prec) = \prec.$$

Jeśli wszyscy głosujący mają takie same preferencje wtedy wybór jest taki sam

W szczególności z NNA i jednogłośności wynika, że jeśli dla dowolnych kandydatów *a* i *b* wszyscy głosujący stwierdzą że **a>b** to społeczna preferencja między a i b jest **a > b**.

Dyktator

Głosujący ***i*** jest dyktatorem funkcji *F* jeśli:

$$\forall \prec_1 \ldots \prec_n \in L \quad F(\prec_1, \ldots, \prec_n) = \prec_i$$

Społeczna preferencja w dyktaturze jest po prostu wyborem dyktatora, przy ignorowaniu głosów innych głosujących

Twierdzenie Arrowa

Każda **funkcja społecznego interesu** na zbiorze więcej niż 2 kandydatów, która spełnia jednogłośność i niezależność nieistotnych alternatyw jest dyktaturą

Twierdzenie pomocnicze (nieformalnie)

Wynik funkcji *F* w stosunku do dwóch dowolnych kandydatów zależy tylko od ciągu preferencji głosujących co do tych dwóch kandydatów. Nie zależy od tego, którzy to są kandydaci!

Jeśli np. $a >_1 b$, $a >_2 b$, $b >_3 a \Rightarrow a > b$

to dla dowolnych c, d

$c >_1 d$, $c >_2 d$, $d >_3 c \Rightarrow c > d$

Twierdzenie pomocnicze (formalnie)

Niech $\succ_1, \ldots, \succ_n$ i $\succ'_1, \ldots, \succ'_n$ będą profilami dwóch graczy tak, że dla każdego gracza *i*

$$a \succ_i b \Leftrightarrow c \succ'_i d$$

Wtedy $a \succ b \Leftrightarrow c \succ' d$, gdzie $\succ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$

i $\succ' = F(\succ'_1, \ldots, \succ'_n)$

Dowód twierdzenia pomocniczego

Załóżmy że mamy dane:

$a >_1 b$
$a >_2 b$ $\xrightarrow{F}$ $a>b$
$b >_3 a$

$c >_1 d$
$c >_2 d$ $\xrightarrow{F}$??
$d >_3 c$

Wynik dla c i d jest zależny tylko od preferencji co do *c* i *d* (NNA), które to są analogiczne do preferencji dla a i b.

$c >_1 a >_1 b >_1 d$
$c >_2 a >_2 b >_2 d$ $\xrightarrow{F}$
$b >_3 d >_3 c >_3 a$

c>a (jednogłośność)
a>b (założenie)
b>d (jednogłośność)
=> c > d

Dowód twierdzenia pomocniczego

Załóżmy, że $a \succ b$ i $c \neq b$. Teraz łączymy każde $\succ_i$ i $\succ'_i$ w pojedynczą preferencję $\succ_i$, umieszczając c zaraz nad a (chyba że c=a) i d zaraz pod b (chyba że d=b) i zachowując wewnętrzny porządek w każdej parze (a,b) i (c,d). Teraz używając jednogłośności mamy $c \succ a$ i $b \succ d$ i przez przechodniość $c \succ d$. To dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Dowód Tw. Arrowa

Weźmy jakiekolwiek $a \neq b \in A$ i dla każdego $0 \leq i \leq n$ definiujemy profil preferencji π^i, w którym dokładnie pierwszych i graczy woli a od b, np. $\pi^i, a \succ_j b \Leftrightarrow j \leq i$. Z jednogłośności, w $F(\pi^0)$ mamy $b \succ a$, z kolei w $F(\pi^n)$ mamy $a \succ b$. Patrząc na $\pi^0, \pi^1, \ldots, \pi^n$ ranking pomiędzy a i b w pewnym punkcie się zmienia, więc dla pewnego i^* mamy $F(\pi^{i^*-1}), b \succ a$, z kolei dla $F(\pi^{i^*}), a \succ b$. Dokończymy dowód pokazując, ze i^* jest dyktatorem

π^0	π^1		π^i		π^n
$b >_1 a$	$a >_1 b$		$a >_1 b$		$a >_1 b$
$b >_2 a$	$b >_2 a$		$a >_2 b$		$a >_2 b$
$b >_3 a$	$b >_3 a$	…	$a >_3 b$	…	$a >_3 b$
...	...		...		...
$b >_i a$	$b >_i a$		$a >_i b$		$a >_i b$
…	…		$b <_{i+1} a$		$a >_{i+1} b$
			...		…
$b >_n a$	$b >_n a$		$b >_n a$		$a >_n b$
$\Downarrow F$	$\Downarrow F$		$\Downarrow F$	$\Downarrow F$ ... $\Downarrow F$	$\Downarrow F$
$b > a$	$b > a$		$a > b$	(te wyniki są już nieistotne)	$a > b$

Pokażemy że głosujący ***i*** jest dyktatorem czyli dla dowolnego $c \mathrel{!=} d$ Jeśli $c >_i d$ to $c > d$. Weźmy *e* różne od *c* i *d*. Dla $k < i$ ustawiamy *e* na początku w relacji $>_k$, dla $k > i$ ustawiamy *e* na końcu w relacji $>_k$, dla $k = i$ ustawiamy e następująco $c >_i e >_i d$.

Preferencje dla pary (c,e) są identyczne jak dla (a,b) w π^{i-1} => c>e

Preferencje dla pary (e,d) są identyczne jak dla (a,b) w π^{i} => e>d

A więc c > d. $\blacksquare$

Dowód

$e >_1 d ? c$
$e >_2 d ? c$
$e >_3 d ? c$
...
$\mathbf{c >_i e >_i d}$
$d ? c >_{i+1} e$
…
$d ? c >_n e$

$e >_1 d$
$e >_2 d$
$e >_3 d$
...
$e >_i d$
$\mathbf{d >_{i+1} e}$
…
$d >_n e$

Identyczne jak dla (a,b) w π^i
Z twierdzenia pomocniczego
wynika że **e > d**

$e >_1 c$
$e >_2 c$
$e >_3 c$
…
$e >_{i-1} c$
$\mathbf{c >_i e}$
…
$c >_n e$

identyczne jak dla (a,b) w π^{i-1}
Z twierdzenia pomocniczego
wynika że **c >e**